Способы конструирования задач: конструирование задач аналогичных данной; обобщение задачи; конкретизация задачи; конструирование задачи, обратной данной; варьирование; переформулировка задачи.

1-й способ конструирования задач – *конструирование задач аналогичных данной* (в основу положен прием открытия фактов – аналогия).

Аналогия понимается как один из видов традуктивного умозаключения (лат. traductio – перемещение, при котором от двух или нескольких суждений некоторой степени общности переходят к новому суждению той же степени общности), как сходство предметов в каких-либо свойствах, признаках, отношениях, причем таких предметов, которые в целом различны (Н.И. Кондаков), как сходство отношений, причем это сходство имеет ясный смысл, если отношения управляются одними и теми же законами (Д. Пойа).

При умозаключении по аналогии знание, полученное из рассуждений о каком-либо объекте, переносится на другой, менее изученный. Заключения, полученные по аналогии, носят вероятностный характер. Они являются одним из источников гипотез, индуктивных рассуждений и играют важную роль в открытиях нового факта учащимися.

Примером конструирования на основе аналогии является мысленный перенос многих понятий и суждений, относящихся к планиметрии в стереометрию. Так, например, попытки найти в пространстве теорему, аналогичную теореме Пифагора в плоскости, привели к рассмотрению идее поставить в соответствие на плоскости объекты, свойства объектов, отношения в пространстве.

Исходная задача:

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату
гипотенузы.

• треугольник	→	• тетраэдр
• две стороны, исходящие из одной вершины, взаимно перпендикулярны	→	• три ребра, исходящие из одной вершины, взаимно перпендикулярны
• отношение между двумя взаимно перпендикулярными сторонами и третьей стороной	→	• отношение между площадями (S_1, S_2, S_3) трех взаимно перпендикулярных граней и площадью (S_4) четвертой грани

Сконструированная задача:

В тетраэдре сумма квадратов площадей трех взаимно перпендикулярных граней равна квадрату площади четвертой грани.

2-й способ конструирования задач – *обобщение задачи* (в основу положен переход от частного к общему).

Обобщение как форма перехода от частного к общему имеет целью выделение общих существенных свойств, принадлежащих только данному классу объектов. Использование обобщения основано на расширении области изменения параметра, либо на переходе от данного множества к более широкому множеству, содержащему данное. Первое направление преимущественно применяется в алгебре, второе – в геометрии. Снятие или ослабление ограничения, наложенного на условие первоначальной задачи, приводит к новой, более общей задаче или к доказательству некоторого утверждения.

З а д а ч а: Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, где *O* – произвольная точка пространства, а *M* – середина отрезка *AB*.

Данная задача на практике часто используется в качестве иллюстрации применения векторного метода. Если *OM* выразить через векторы *OA* и *AM* и векторы *OB* и *BM*, далее после преобразований выполнить сложение полученных векторных равенств, то получим требуемый результат.

Приведенные рассуждения можно использовать в случае замены в условии задачи отрезка параллелограммом. Преобразования условия вызовет изменения и в заключении задачи: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, где *A, B, C, D* – вершины параллелограмма.

Дальнейшее обобщение задачи приводит к замене параллелограмма параллелепипедом, что обуславливает и новое требование задачи: докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1})$, где A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 – вершины параллелепипеда.

Анализ преобразований условия задачи показал, что они осуществляются при сохранении основной идеи: фигура, заданная в условии, должна быть центрально-симметричной. Это условие и определяет направление обобщения.

3-й способ конструирования задач – *конкретизация задачи* (прием обратный к обобщению).

И с х о д н а я з а д а ч а: *AB* и *CD* пересекаются в точке *M*. *A, B, C, D* лежат на окружности. Докажите, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Конкретизируя положение точки *M* – внутри или вне окружности рассматриваем возможные случаи.

При рассмотрении частного случая исходной задачи: одна из хорд (пусть *AB*) является диаметром окружности, а другая (хорда *CD*) перпендикулярна ей – получим, что $AM \cdot MB = CM^2$.

Формулировка задачи примет вид: если из некоторой точки окружности опустить перпендикуляр на диаметр, то квадрат перпендикуляра равен произведению отрезков диаметра (Перпендикуляр, опущенный из некоторой точки окружности на диаметр, есть среднее пропорциональное между отрезками диаметра). Заметив, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой, преобразуем задачу в следующую: если из вершины прямого угла опустить перпендикуляр на гипотенузу, то квадрат перпендикуляра равен произведению отрезков гипотенузы.

Взяв предельный случай, который дает совпадение точек, например, *A* и *B*, формулировка задачи трансформируется в следующую: через точку *M* проведены касательная *MA* (*A* – точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках *C* и *D*. Докажите, что $MA^2 = MC \cdot MD$.

Второй предельный случай (совпадение точек *C* и *D*) соответствует следующей задаче: из точки *M* проведены к окружности две касательные *MA* и *MC* (*A* и *C* – точки касания). Докажите, что *MA* = *MC*.

4-й способ конструирования задач – *конструирование задачи, обратной данной*.

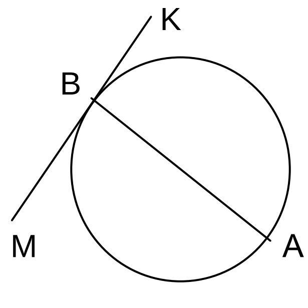
Задача: Даны четыре точки *A, B, C* и *D*, причем $A \notin BC$. Докажите, что если эти точки принадлежат одной плоскости, то $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, причем $x+y+z=1$ и *O* – произвольная точка пространства.

Условие задачи: четыре точки, принадлежащие одной плоскости, заключение: $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, где *x, y, z* такие, что $x+y+z=1$. Преобразуем исходную задачу таким образом, что бы ее условие (точки принадлежат одной плоскости) стало заключением, а заключение ($\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, где *x, y, z* такие, что $x+y+z=1$) – условием. Получим задачу, которая является обратной исходной.

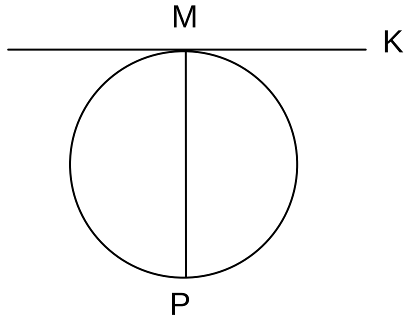
Обратная задача: Даны четыре точки *A, B, C* и *D*, причем A$\notin$BC. Докажите, что если $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, причем $x+y+z=1$ и O – произвольная точка пространства, то эти точки принадлежат одной плоскости.

6-й способ конструирования задач – *переформулировка задачи.*

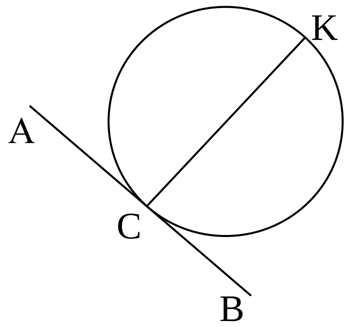
1. Диаметр окружности *AB* перпендикулярен прямой *MK*. Точка *B* лежит на прямой *MK*. Сколько общих точек имеют прямая *MK* и окружность?



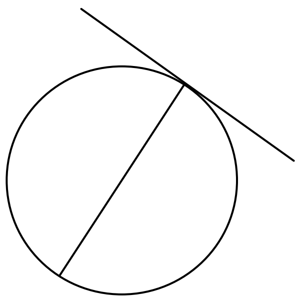
2. *MP* – диаметр окружности, угол *KMP* равен 90°. Является ли *KM* касательной к окружности?



3. Прямая *AB* перпендикулярна диаметру окружности *KC.* Будет ли прямая *AB* касательной к этой окружности?



4. Угол *KAE* – прямой, *AK* – диаметр окружности. Сколько общих точек имеют прямая *AE* и окружность?



«Найди лишнее»: учитель зачитывает по четыре слова, из которых три объединены общим родовым понятием, а одно к такому понятию не относится или относится в меньшей мере. Учащиеся должны определить это слово и записать в тетради. На запись дается 10 секунд.

1. Параллелограмм, треугольник, куб, окружность.
2. Прямоугольный параллелепипед, куб, тетраэдр, наклонный параллелепипед.
3. Прямоугольник, треугольник, ромб, квадрат.
4. Дуга, сегмент, окружность, прямая.
5. Равнобедренный, прямоугольный, остроугольный, тупоугольный треугольник.
6. Пирамида, параллелепипед, куб, шар.
7. Треугольник, круг, трапеция, квадрат.
8. Ромб, трапеция, квадрат, прямоугольник.
9. Октаэдр, тетраэдр, икосаэдр, параллелограмм.
10. Круг, треугольник, трапеция, квадрат.
11. Цилиндр, куб, многоугольник, шар.
12. Цилиндр, шар, куб, конус.

Выделим некоторые виды отношений между геометрическими объектами:

– «Часть – целое» (отрезок – прямая, луч – прямая, …).
– «Объект – ближайший род» (сторона – отрезок, тетраэдр – многогранник, …).
– «Плоскость – пространство» (точка – прямая, вершина – ребро, …).
– «Объект – его элемент» (параллелограмм – сторона, квадрат – диагональ, …).
– «Объект – геометрическая величина» (треугольник – площадь, куб – объем, …).
– «Геометрическая величина – единица измерения» (площадь – м^2, объем – м^3, …).

Соответствующие задания могут быть следующими.

1. Замените знак “?” геометрическим объектом из списка:

Диаметр : Радиус = Окружность : ?

а) отрезок; б) точка; в) дуга; г) линия; д) луч.

Точка : Прямая = ? : Пространство

а) отрезок; б) плоскость; в) прямая; г) луч; д) точка.